

Análisis 1 - Alimentos - 1° cuatrimestre 2021 (virtual)

PRÁCTICA I

VECTORES, RECTAS, PLANOS Y SISTEMAS LINEALES

Geometría en el plano y el espacio

1. Graficar los puntos $P = (3, 1)$ y $Q = (1, -5) \in \mathbb{R}^2$ en el plano.
 - a) Calcular y representar gráficamente los puntos $P+Q$, $P-Q$, $3.P$, $-2.Q$ y $P+\frac{1}{2}.Q$.
 - b) Representar en un mismo gráfico $3.P$, $-2.Q$ y $3.P-2.Q$.
 - c) Graficar los conjuntos $A = \{a.P \in \mathbb{R}^2 / a \in \mathbb{R}\}$ y $B = \{b.Q \in \mathbb{R}^2 / b \in \mathbb{R}\}$
 - d) Determinar geoméricamente para qué valores de (x, y) existen a y $b \in \mathbb{R}$ tales que $a.P + b.Q = (x, y)$.
2.
 - a) Representar gráficamente en \mathbb{R}^3 los puntos $P = (1, 0, 0)$, $Q = (1, 1, 0)$, $R = (1, 1, 1)$ y calcular y representar gráficamente los puntos $S = P + Q$, $T = Q - R$ y $V = \frac{1}{2}.R - P$.
 - b) Un cubo tiene vértices en $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Escribir las coordenadas de los otros 4 vértices.
 - c) Hallar, si es posible, a , b y $c \in \mathbb{R}$ tales que $(1, 2, 3) = a.(1, 0, 0) + b.(1, 1, 0) + c.(1, 1, 1)$.
3. Efectuar las operaciones indicadas en cada caso.
 - a) Si $P = (2, 3, 0, -2)$ y $Q = (1, 4, -2, -1) \in \mathbb{R}^4$, calcular $R = P+3.Q$ y $S = 2.P-\frac{1}{3}.Q$.
 - b) Si $P = (1, 0, -3, 0, 2)$ y $Q = (0, -1, -2, 0, 4) \in \mathbb{R}^5$, calcular $R = -P + 2.Q$ y $S = -2.P - \frac{2}{3}.Q$.
4. Dado un vector se le realizan dos operaciones consecutivas: primero se lo multiplica por un escalar fijo (dilatación) y luego se le suma otro vector fijo (traslación).
 - a) Si se le aplican estas dos operaciones al vector $\mathbf{v} = (1, 2)$ en \mathbb{R}^2 se llega al vector $\mathbf{w} = (-6, 12)$. ¿Se puede decidir cuál fue la dilatación y cuál la traslación? (Sugerencia: buscar si es posible llegar de \mathbf{v} a \mathbf{w} de dos formas distintas).
 - b) Si se le aplican las dos operaciones a $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$ y a $\mathbf{v}_2 = (3, 4)$ en \mathbb{R}^2 se llega a $\mathbf{w}_1 = (-6, 12)$ y a $\mathbf{w}_2 = (-5, 13)$ respectivamente. Hallar el escalar que da la dilatación y el vector que da la traslación.
 - c) ¿Puede ser que luego de aplicar la misma dilatación y la misma traslación a los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ y $\mathbf{v}_2 = (2, -4)$ se llegue a los vectores $\mathbf{w}_1 = (2, 4)$ y $\mathbf{w}_2 = (-2, 3)$ respectivamente?

Producto interno (o escalar)

5. a) En cada caso, graficar los vectores de \mathbb{R}^2 involucrados, calcular el producto escalar \cdot indicado y determinar si son ortogonales:

$$(1, -1) \cdot (2, 4); \quad (1, 3) \cdot (-6, 2); \quad (1, 2) \cdot (1, 2); \quad (-1, 0) \cdot (0, 1)$$

- b) En cada caso, calcular el producto escalar indicado de vectores de \mathbb{R}^3 y decidir si son ortogonales:

$$(1, 3, 5) \cdot (3, 0, -2); \quad (-1, 2, 1) \cdot (6, 1, 4); \quad (2, 4, -2) \cdot (-3, -6, 3); \quad (1, 0, 0) \cdot (0, 1, 1)$$

- c) Hallar tres vectores distintos de \mathbb{R}^2 que sean ortogonales a $(5, -3)$. ¿Qué relación cumplen entre sí?
- d) Encontrar dos vectores no nulos de \mathbb{R}^3 ortogonales a $(1, 1, 2)$ que no sean paralelos entre sí.
- e) Hallar tres vectores distintos de \mathbb{R}^3 que sean ortogonales a $(1, 2, 1)$ y a $(1, -3, 0)$ simultáneamente. ¿Qué relación cumplen entre sí?
6. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas para vectores \mathbf{v} , \mathbf{w} y \mathbf{z} :
- a) Si \mathbf{v} es ortogonal a \mathbf{w} , entonces \mathbf{v} es ortogonal a $-\mathbf{w}$ y a $5\mathbf{w}$.
- b) Si \mathbf{v} es ortogonal a \mathbf{w} y a \mathbf{z} , entonces \mathbf{v} es ortogonal a $\mathbf{w} + \mathbf{z}$ y a $3\mathbf{w} - 2\mathbf{z}$.
- c) Si \mathbf{v} es ortogonal a \mathbf{w} , entonces $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ es ortogonal a \mathbf{w} .
- d) Si \mathbf{v} es ortogonal a \mathbf{w} y a $\mathbf{w} - 3\mathbf{z}$, entonces \mathbf{v} es ortogonal a \mathbf{z} .

Rectas en \mathbb{R}^2

7. Graficar $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^2$ la recta que pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(-2, 2)$.
- a) Encontrar dos vectores dirección distintos para \mathbb{L} . Graficarlos.
- b) Dar dos ecuaciones paramétricas para \mathbb{L} .
- c) Decidir cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta \mathbb{L} : $(-3, 1)$, $(4, 0)$, $(0, 0)$, $(-3x + 1, x + 1)$.
- d) ¿Es \mathbb{L} igual a la recta $\mathbb{L}' : X = \lambda \cdot (-27, 9) + (-14, 6)$? ¿Y a la recta $\mathbb{L}'' : X = \lambda \cdot (27, -9) + (-27, 9)$?
8. Un móvil se desplaza por el plano \mathbb{R}^2 de forma tal que, en tiempo t , se encuentra en el punto $t \cdot (3, -2) + (1, 1)$.
- a) Graficar la trayectoria del móvil si parte en tiempo $t = 0$.
- b) Graficar los puntos donde se encuentra en tiempo $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ y $t = 4$.
- c) Si $P(t)$ es el punto en el que se encuentra en tiempo t , calcular $P(0)$ y $P(t+1) - P(t)$ para un valor genérico de t . ¿Qué relación tienen con los datos dados?
- d) Si hay una pared ubicada en la recta vertical de ecuación $x = 16$, ¿en qué momento choca el móvil contra la pared?

9. Dada la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(1, 2) + (3, 2)$:

- a) Dar una ecuación paramétrica para la recta \mathbb{L}_1 paralela a \mathbb{L} que pasa por $(0, 0)$.
- b) Dar una ecuación paramétrica para la recta \mathbb{L}_2 paralela a \mathbb{L} que pasa por $(-1, -6)$.
- c) Graficar \mathbb{L} , \mathbb{L}_1 y \mathbb{L}_2 en un mismo sistema de coordenadas. ¿Qué relación cumplen \mathbb{L}_1 y \mathbb{L}_2 ? Justificar.

10. Sea \mathbb{L} la recta que pasa por $(-1, 2)$ y $(0, 3)$.

- a) Hallar una ecuación paramétrica de la recta \mathbb{L}_1 perpendicular a \mathbb{L} que pasa por $(0, 0)$.
- b) Hallar una ecuación paramétrica de la recta \mathbb{L}_2 perpendicular a \mathbb{L} que pasa por $(1, 2)$.
- c) Graficar las tres rectas en un mismo sistema de coordenadas. ¿En qué posición relativa están \mathbb{L}_1 y \mathbb{L}_2 ?

11. Sean $P = (4, 9)$, $Q = (-6, 5)$ y $\mathbb{L} : X = \lambda.(1, 2)$. Hallar todos los puntos $R \in \mathbb{L}$ tales que:

- a) el triángulo PQR sea rectángulo en P .
- b) el triángulo PQR sea rectángulo en R .

12. a) Dar una ecuación paramétrica de la recta paralela a $\mathbb{L} : x = 2$ que pasa por $(3, 8)$.

b) Dar una ecuación implícita de la recta perpendicular a $\mathbb{L} : X = \lambda.(2, 3) + (1, 2)$ que pasa por $(5, -2)$.

13. Hallar, en cada caso, la intersección de las rectas \mathbb{L}_1 y \mathbb{L}_2 y decidir sus posiciones relativas:

a) $\mathbb{L}_1 : 3x + y = -3$ y $\mathbb{L}_2 : X = \alpha(1, 3) + (2, 0)$.

b) $\mathbb{L}_1 : -2x + 3y = -13$ y $\mathbb{L}_2 : y = 7x + 2$.

c) $\mathbb{L}_1 : X = \alpha.(-4, 1) + (2, 1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \beta.(-2, 1) + (0, -1)$.

d) $\mathbb{L}_1 : X = \alpha.(-3, 2) + (5, 1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \beta.(6, -4) + (0, 1)$.

e) $\mathbb{L}_1 : x - 2y = -1$ y $\mathbb{L}_2 : X = \alpha.(2, 1) + (1, 1)$

14. Sean $\mathbb{L}_1 : x - 2y = 3$, $\mathbb{L}_2 : -2x + y = -3$ y $\mathbb{L}_3 : X = \alpha.(1, -7)$.

a) Dar una ecuación paramétrica de la recta \mathbb{L} que pasa por el punto de intersección de \mathbb{L}_2 y \mathbb{L}_3 y es paralela a \mathbb{L}_1 .

b) Dar una ecuación implícita de la recta \mathbb{L}' que pasa por el punto de intersección de \mathbb{L}_1 y \mathbb{L}_2 y es perpendicular a \mathbb{L}_3 .

Producto vectorial, rectas y planos en \mathbb{R}^3

15. a) En cada caso, calcular el producto vectorial indicado de vectores de \mathbb{R}^3 . ¿En qué casos da $(0, 0, 0)$?

$$(1, 3, 5) \times (3, 0, -2); \quad (-1, 2, 1) \times (6, 1, 4); \quad (2, 4, -2) \times (-3, -6, 3);$$

$$(0, 0, 0) \times (1, -1, 3); \quad (a, b, c) \times (ka, kb, kc)$$

- b) Dar un vector que sea ortogonal a $(1, 3, 5)$ y a $(3, 0, -2)$ simultáneamente.

16. En cada caso, dar una ecuación paramétrica de la recta en \mathbb{R}^3 que:

a) tiene dirección $(1, -1, 2)$ y pasa por el origen de coordenadas.

b) tiene dirección $(1, -1, 2)$ y pasa por el punto $(0, 2, -3)$.

c) pasa por los puntos $(1, 5, 1)$ y $(-4, 3, 2)$.

d) es paralela a $\mathbb{L} : X = \lambda.(2, 1, -1) + (-2, 4, 1)$ y pasa por el punto $(0, 3, 2)$.

e) pasa por el origen y es paralela a la recta que contiene a $(2, -2, 1)$ y a $(-3, 2, 1)$.

f) es perpendicular a $(2, 1, 0)$ y a $(0, -1, 2)$ simultáneamente y pasa por el origen.

g) es perpendicular a las rectas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(2, 1, -1) + (-2, 4, 1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \lambda.(-1, 0, 2) + (2, 1, 0)$ simultáneamente y pasa por el punto $(0, 3, 2)$.

17. Sean $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(1, 2, -1) + (1, 3, 5)$ y \mathbb{L}_2 la recta paralela a \mathbb{L}_1 que pasa por el punto $(3, 2, 4)$.

a) Hallar el punto de \mathbb{L}_2 que tiene coordenada $z = 0$.

b) Decidir si los puntos $(-1, -1, 7)$ y $(1, -2, 6)$ están en \mathbb{L}_2 .

18. a) Decidir si los puntos $(1, 2, -4)$, $(3, -2, 0)$ y $(2, 0, -2)$ están alineados.

b) Decidir si los puntos $(1, 1, 3)$, $(2, 1, 4)$ y $(2, 1, 5)$ están alineados.

c) Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que los puntos $(2+a, 3, -1)$, $(5, a+3, -2)$ y $(a, -1, 1)$ están alineados.

19. Sean $\mathbb{L} : X = \beta.(1, 1, -2) + (0, 0, 4)$ y $P = (3, 1, 0)$. En cada caso, determinar un punto $Q \in \mathbb{R}^3$ tal que:

a) la recta que pasa por P y Q sea paralela a \mathbb{L} .

b) $Q \in \mathbb{L}$ y la recta que pasa por P y Q sea perpendicular a \mathbb{L} .

20. Dadas las rectas

$$\mathbb{L}_1 : X = \alpha.(1, 2, 1) + (2, 3, 2)$$

$$\mathbb{L}_2 : X = \beta.(0, 1, -1) + (1, 3, -1)$$

$$\mathbb{L}_3 : X = \gamma.(2, 4, 2) + (1, 5, 0)$$

$$\mathbb{L}_4 : X = \delta.(2, 4, 2) + (3, 5, 3)$$

calcular las siguientes intersecciones y, en cada caso, dar la posición relativa de las rectas en el espacio:

$$a) \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \quad b) \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_3 \quad c) \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3 \quad d) \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_4$$

21. a) Dos móviles se desplazan por el espacio de forma tal que las ecuaciones de sus movimientos están dadas por $t.(1, 2, -4) + (-1, 3, 0)$ y $t.(1, 6, -10) + (2, 1, 0)$ para $t \geq 0$. Decidir si las trayectorias de los móviles se cruzan y, en caso afirmativo, decir en qué punto. ¿Se encuentran los dos móviles?
- b) Mismo problema para las ecuaciones de movimiento

$$t.(1, 2, 0) + (0, 3, 2) \quad \text{y} \quad t.(3, -4, 0) + (1, 5, 7).$$

¿Son paralelas estas trayectorias?

22. En cada caso, dar una ecuación implícita de:

- a) los planos coordenados xy , xz y yz .
- b) el plano Π perpendicular al vector $(1, -1, 2)$ que pasa por el origen de coordenadas.
- c) el plano Π perpendicular a la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(2, 1, -1) + (-2, 4, 1)$ que pasa por el punto $(-4, 3, 2)$.
- d) el plano Π paralelo al plano $\Pi_1 : 2x - 3y + z = 3$ que pasa por el punto $(0, 1, 2)$.
- e) el plano Π que contiene a los puntos $(1, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$ y $(1, 1, -1)$.
23. a) Decidir si el punto $(1, 2, -3)$ está en el plano que pasa por los puntos $(1, 1, 0)$, $(2, 3, -1)$ y $(5, 0, 2)$.
- b) Decidir si los puntos $(1, 1, 0)$, $(2, 3, -1)$, $(5, 0, 2)$ y $(0, -1, 1)$ son coplanares (es decir, están en un mismo plano).
24. Dados el plano $\Pi : 2x - 3y + 7z = 3$ y las rectas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(2, 1, -1) + (-2, 4, 1)$, $\mathbb{L}_2 : X = \lambda.(2, -1, -1) + (-7, -1, 2)$ y $\mathbb{L}_3 : X = \lambda.(-1, 4, 2) + (1, 0, 1)$:
- a) Calcular las intersecciones $\Pi \cap \mathbb{L}_1$, $\Pi \cap \mathbb{L}_2$ y $\Pi \cap \mathbb{L}_3$.
- b) Un móvil se dirige hacia el plano Π según la ecuación de movimiento $t.(1, 1, 1) + (-7, 0, -1)$ para $t \geq 0$. Calcular en qué tiempo llega al plano y en qué punto lo impacta.
25. En cada caso, dar una ecuación paramétrica de una recta en \mathbb{R}^3 que:

- a) es perpendicular al plano $\Pi : 4x - 2y + z = 3$ y pasa por el punto $(0, 1, -2)$.
- b) es paralela a los planos $\Pi_1 : 3x - y + 2z = 4$ y $\Pi_2 : y + z = 3$ simultáneamente y pasa por el punto $(1, 3, 1)$.
- c) es perpendicular a la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(0, 0, 1) + (1, 3, -2)$ y está incluida en el plano $\Pi : x + y + z = 2$.
26. a) Dar una ecuación implícita del plano Π que contiene a las rectas transversales $\mathbb{L} : X = \lambda.(1, 2, -1) + (3, 0, 0)$ y $\mathbb{L}' : X = \lambda.(-2, -4, 1) + (5, 4, -3)$.
- b) Dar una ecuación implícita del plano Π que contiene a las rectas paralelas $\mathbb{L} : X = \lambda.(1, 2, -1) + (3, 0, 0)$ y $\mathbb{L}' : X = \lambda.(-2, -4, 2) + (0, 1, 1)$.
- c) ¿Existe algún plano que contenga simultáneamente a las rectas $\mathbb{L} : X = \lambda.(1, 2, 0) + (3, 0, -3)$ y $\mathbb{L}' : X = \lambda.(-2, 0, 0) + (0, 2, 3)$?

27. a) Hallar una ecuación paramétrica del plano Π_1 que pasa por $P = (2, -1, 7)$, $Q = (0, 2, 3)$ y $R = (1, -1, 2)$.
 b) Verificar que P , Q y R pertenecen al plano $\Pi_2 : X = \alpha \cdot (1, 0, 5) + \beta \cdot (-1, 3, 1) + (1, -1, 2)$. Deducir que, como P , Q y R no están alineados, Π_1 y Π_2 son el mismo plano.
 c) Hallar una ecuación paramétrica del plano Π_3 paralelo a Π_1 que pasa por el punto $(1, 0, 2)$.

28. Dar en \mathbb{R}^3 ecuaciones implícitas de:

- a) el plano $\Pi_1 : X = \alpha \cdot (1, 0, 5) + \beta \cdot (-1, 3, 1) + (1, -1, 2)$.
 b) el plano paralelo al plano $\Pi_2 : X = \alpha \cdot (1, 3, 2) + \beta \cdot (2, 5, 3) + (3, 2, 1)$ que pasa por el punto $(2, 3, 1)$.

29. Decidir en cada caso si los planos Π_1 y Π_2 se intersecan. En caso afirmativo, dar una ecuación paramétrica de la intersección.

a) $\Pi_1 : y = 0, \Pi_2 : z = 2$ b) $\Pi_1 : x + z = 0, \Pi_2 : y - z = 0$

c) $\Pi_1 : x + y - z = 0, \Pi_2 : x + z = 2$ d) $\Pi_1 : x - z = 0, \Pi_2 : 2x - 2z = 3$

30. En cada caso, dar ecuaciones implícitas que defnan la recta pedida.

- a) $\mathbb{L}_1 : X = \alpha \cdot (1, 3, 1) + (2, 0, 0)$.
 b) $\mathbb{L}_2 : X = \beta \cdot (-3, 0, 1) + (1, 1, 1)$.
 c) la recta \mathbb{L}_3 perpendicular al plano $\Pi_1 : X = \alpha \cdot (1, 0, 5) + \beta \cdot (-1, 3, 1) + (1, -1, 2)$ que pasa por $(1, 0, 1)$.
 d) la recta \mathbb{L}_4 que pasa por el punto $(2, 0, -1)$, está incluida en el plano $\Pi_2 : 3x - z = 7$ y es paralela al plano $\Pi_3 : X = \alpha \cdot (2, 0, -2) + \beta \cdot (3, 1, 1) + (1, 0, 2)$ simultáneamente.

31. Dadas las rectas

$$\mathbb{L}_1 : \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \mathbb{L}_2 : \begin{cases} 2x - 3z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

- a) Dar ecuaciones paramétricas para \mathbb{L}_1 y para \mathbb{L}_2 .
 b) Decidir si son paralelas, coincidentes, alabeadas o se cortan en un punto.

32. Dado el sistema lineal

$$\mathcal{S} : \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_1 + 3x_2 & - & x_4 = 0 \\ 2x_1 & + & 3x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

¿Cuáles de las siguientes 4-uplas son soluciones de \mathcal{S} ? ¿Y del sistema homogéneo (con todas las ecuaciones igualadas a 0)?

- a) $\mathbf{x} = (2, 2, 1, 0)$, $\mathbf{y} = (1, 1, 1, 4)$, $\mathbf{z} = (0, 0, 0, 0)$
 b) $\mathbf{u} = (-2, -\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, -7)$, $\mathbf{v} = (-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$, $\mathbf{w} = (-1, -2, 3, -7)$.

33. Determinar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los que $(a, -a, a - 1)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} x_1 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + 2x_2 & & & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 & & & = & 5 \end{cases}$$

Normas, distancias y ángulos

34. Dados $\mathbf{v} = (3, -4)$ y $\mathbf{w} = (1, 2)$ en \mathbb{R}^2 , calcular

$$\|\mathbf{v}\|, \quad \|\mathbf{w}\|, \quad \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|, \quad \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|, \quad \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|, \quad \|2\mathbf{v}\|, \quad \left\| \frac{1}{2}\mathbf{v} \right\|, \quad \left\| \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} \right\|.$$

35. Calcular la distancia entre los puntos dados y el ángulo entre los vectores determinados por ellos.

$$\begin{array}{ll} a) (2, 3) \text{ y } (5, 1) & b) (1, 0) \text{ y } (-\sqrt{3}, 1) \\ c) (1, 0, 0) \text{ y } (-\sqrt{2}, 1, 1) & d) (0, -1, 1) \text{ y } (-\sqrt{2}, 1, 1). \end{array}$$

36. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ tales que

- a) la norma del vector $(2, -2, k)$ es igual a 3.
b) el ángulo entre los vectores $(2, 1, 1)$ y $(1, -1, k)$ es $\frac{\pi}{3}$.

37. Hallar los ángulos que forman cada uno de los vectores dados con los semiejes coordenados positivos.

- a) $(1, -1)$, $(-1, \sqrt{3})$, $(1, 2)$ en \mathbb{R}^2 .
b) $(1, 0, -1)$, $(0, 2, 0)$, $(1, -1, 2)$ en \mathbb{R}^3 .

38. Dados la norma ρ y el ángulo θ que forman los vectores con el semieje positivo de las x (medido en sentido antihorario), hallar sus coordenadas en \mathbb{R}^2 .

$$a) \rho = 2, \theta = \frac{\pi}{6} \quad b) \rho = \sqrt{2}, \theta = \frac{3\pi}{4} \quad c) \rho = 3, \theta = \frac{\pi}{2}.$$

39. Sabemos que: el ángulo entre \mathbf{v} y \mathbf{w} es $\frac{\pi}{3}$, que $\|\mathbf{w}\| = 4$ y que $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ es ortogonal a \mathbf{v} . Calcular $\|\mathbf{v}\|$.

Matrices y sistemas lineales

40. Resolver por el método de eliminación de Gauss el sistema cuya matriz ampliada es $(A|\mathbf{b})$.

$$\begin{array}{ll} a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \mathbf{b} = (1, 2) \\ & \mathbf{b} = (0, 0) \\ b) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{b} = (3, 1, -1) \\ & \mathbf{b} = (0, 0, 0) \\ & \mathbf{b} = (1, 1, 2) \\ c) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{b} = (5, 3, 2) \\ & \mathbf{b} = (-1, 1, 2) \\ & \mathbf{b} = (0, 0, 0) \\ d) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{b} = (0, 0, 0) \\ & \mathbf{b} = (1, 0, 0) \\ & \mathbf{b} = (0, 1, 0) \end{array}$$

$$e) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \mathbf{b} = (1, 2, 1, 2) \\ \mathbf{b} = (2, 0, -1, 2) \\ \mathbf{b} = (0, 0, 0, 0) \end{array}$$

41. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Si $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ son soluciones de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$,

- hallar una solución de $A\mathbf{x} = 0$.
- hallar una recta de soluciones de $A\mathbf{x} = 0$.
- hallar cuatro soluciones de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

42. Sean $(1, 3, 1)$, $(2, 2, 4)$ y $(2, 0, 4)$ soluciones de un sistema lineal no homogéneo.

- Hallar dos rectas distintas tales que todos sus puntos sean soluciones del sistema homogéneo asociado.
- Encontrar un plano tal que todos sus puntos sean soluciones del sistema no homogéneo.

43. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Supongamos que $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son soluciones de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ es solución de } A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a) encontrar una solución del sistema $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) encontrar una recta de soluciones del sistema $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

44. Determinar todas las matrices B que verifican

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

45. a) Exhibir una matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $A^2 = -I$.

b) Sean A, B y $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mostrar la falsedad de las siguientes afirmaciones:

- 1) $(A \cdot B)^2 = A^2 B^2$
- 2) $A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$
- 3) $A \cdot B = A \cdot C$ y $A \neq 0 \Rightarrow B = C$
- 4) $A \cdot B = 0 \Rightarrow B \cdot A = 0$
- 5) $A^j = 0 \Rightarrow A = 0$
- 6) $A^2 = A \Rightarrow A = 0$ ó $A = I_n$

46. Determinar cuáles de las siguientes matrices son inversibles y exhibir la inversa cuando exista.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad G + H; \quad G \cdot H.$$

47. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Decidir si A^{-1} es solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

48. Determinar si el sistema tiene soluciones no triviales, sin resolverlo

$$a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

49. Determinar todos los valores de a, b y c para los cuales el sistema S es compatible.

$$S: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = b \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = c \end{cases}$$

Determinante y sistemas con parámetros

50. Calcular los siguientes determinantes, desarrollando por cofactores por la fila o columna más conveniente.

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

51. Calcular los determinantes de las siguientes haciendo la menor cantidad de cuentas posible

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

52. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Calcular $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(A^t)$, $\det(AB)$, $\det(A+B)$, $\det(A^{10})$ y $\det(A^5B - A^5)$.

53. Si $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $\det(A) = 15$, calcular $\det(2A)$, $\det((3A)^{-1})$, $\det(3A^{-1})$.

54. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $\det(AB) = 2$. Calcular $\det(B^{-1})$.

55. a) Determinar todos valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz A no es inversible.

$$\begin{aligned} \blacksquare A &= \begin{pmatrix} 2 & k+4 \\ k-2 & -4 \end{pmatrix} & \blacksquare A &= \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 2k \end{pmatrix} \\ \blacksquare A &= \begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 0 & k^2-1 & 2 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix} & \blacksquare A &= \begin{pmatrix} k & 3 & 0 \\ k^2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz A es inversible.

$$\begin{aligned} \blacksquare A &= \begin{pmatrix} k+1 & 2 \\ 2 & k-2 \end{pmatrix} & \blacksquare A &= \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \blacksquare A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & k & k+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

56. a) Encontrar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema \mathcal{S} tiene solución única.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} (k^2 - 1)x_1 + x_2 + kx_3 = 0 \\ (k - 1)x_2 + x_3 = 0 \\ (k + 2)x_3 = 0 \end{cases}$$

b) Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema \mathcal{S} admite solución no trivial.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} (k + 1)x_1 + kx_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 + (k + 2)x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

57. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & a+1 & a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}$. Encontrar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $Ax = 2x$ admite solución no trivial.

58. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $\det(B) = -3$.

Hallar todas las soluciones del sistema $(BA)\mathbf{x} = -B\mathbf{x}$.

59. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & k & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $\det(BA^{-1}) = \det\left(\frac{1}{4}BA\right)$.

60. Encontrar todos los valores de a y b para los cuales $(2, 0, -1)$ es la única solución del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - ax_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - bx_3 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

61. Hallar todos los valores de k para los cuales el conjunto de soluciones del siguiente sistema es $M = \{\lambda(1, 1, 0, 0) + (2, 0, -1, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ (k^2 - 1)x_2 + 2x_4 = -k^2 + 1 \\ (k + 1)x_3 + 4x_4 = -k - 1 \end{cases}$$

62. Encontrar todos los valores de a y b para los cuales el sistema cuya matriz ampliada

es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -a & a & b \end{array} \right)$ tiene como conjunto de soluciones una recta.

63. Determinar a y b en \mathbb{R} para que $(1, -1, 2, -1)$ sea solución del sistema cuya matriz

ampliada es $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & a & 2 \\ -2b & -2 & 0 & 2 & 2 \\ a & -4 & -b & 5 & 4 \end{array} \right)$. Para los valores hallados, resolver el sistema.